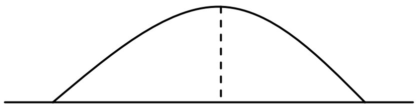
4.4 정규분포(Normal Dist.)

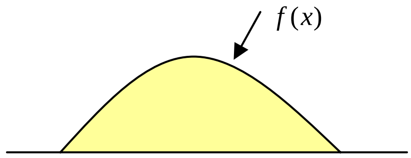
종모양(Bell-shaped), 경험적 법칙(Empirical Rule), 측정 오차(Measurement error)



정의(DEFINITION)

확률변수 X 의 확률밀도함수가 아래와 같으면 평균 μ, 분산 σ^2 을 갖는 정규분포를 따른다고 한다.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty \le x \le \infty$$



NOTATION $X \sim Normal(\mu, \sigma^2)$

In SAS: PDF('NORMAL', x, μ, σ)

평균과 분산

$E(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$: 증명은 MGF을 구한 후 그것을 이용하여 보일 것이다. (skip now)

표준정규분포(Standard Normal dist.)

확률변수 $X \sim Normal(\mu, \sigma^2)$ 일 경우 $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ (표준화: Standardization)은 평균이 0이고 분산이 1인 정규분포함수를 따른다. $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ 이를 표준정규분포라 한다.

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim Normal(0,1)$$

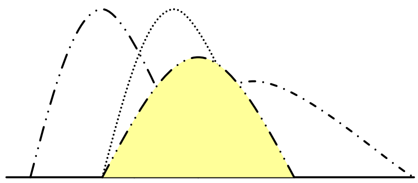
정규분포에 대한 증명은 MGF 함수를 구한 후 다루기로 한다. 평균 0, 분산 1은 기대값의 성질에 의해 증명된다.

EXAMPLE 4-8 평균/분산 구하기

$X \sim ?(\mu, \sigma^2)$ (어떤 분포함수라도)일 경우 $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ 의 평균과 분산을 구하시오.

표준정규분포표

정규분포의 확률은 평균과 분산에 따라 다르다. 와~ 엄청나게 많은 분포표가 필요하다? 해결방법은? 표준정규분포를 이용한다.



EXAMPLE 4-9 정규분포 확률계산하기

확률변수 X 가 표준정규분포를 따른다. $X \sim Normal(0,1)$ 다음 확률을 계산하시오.

(1) $P(X > 2)$ (2) $P(-2 \le X \le 2)$ (3) $P(X \le 1.73)$

0.0228 / 0.9544 / 0.4582

EXAMPLE 4-10 정규분포 확률계산하기

학생들의 SAT 점수는 평균 75, 표준편차 10인 정규분포를 따른다고 하자. 점수 80~90 사이의 학생 비율은 얼마나 되나? 60점~80점 사이 학생의 비율은?

상위 10% 학생의 점수는 몇 점인가?

0.2417 / /

HOMEWORK #10-3 DUE 4월 19일(화)

확률변수 X 가 표준정규분포를 따른다. $X \sim Normal(0,1)$ 다음 확률을 계산하시오.

(1) $P(-0.9 \le X < 0)$ (2) $P(-1.56 \le X \le 2)$ (3) $P(0.3 < X \le 1.56)$

HOMEWORK #10-4 DUE 4월 19일(화)

확률변수 X 가 표준정규분포를 따른다. $X \sim Normal(0,1)$ 다음 상수를 구하시오.

(1) $P(k \le X) = 0.8643$ (2) $P(-k < X < k) = 0.9$ (3) $P(-k < X < k) = 0.99$

HOMEWORK #10-5 DUE 4월 19일(화)

○○회사 생산하는 볼트 지름의 크기는 평균 950 millimeters, 표준편차 10 millimeters인 정규분포를 따른다고 한다.

(1)볼트를 하나 선택했을 때 그것의 지름이 947~958 millimeters일 확률을 계산하시오.

(2)볼트의 지름이 상수 c 보다 적을 확률이 0.8531일 경우 상수 c 을 구하시오.

4.5 감마 분포 (Gamma Dist.)

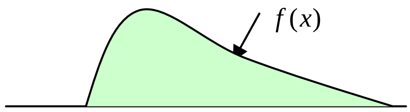
우로 치우친 분포(skewed to the right, positively skewed), 기다리는 시간, 수명

정의(DEFINITION)

다음 확률밀도함수를 갖는 확률변수는 감마분포를 따른다고 한다.

$$f(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, 0 \le x, 0 < \alpha, \beta$$

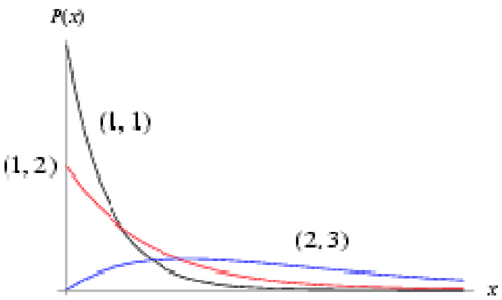
$$where\ \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

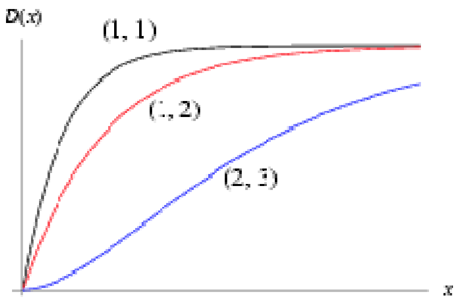


NOTATION $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$

In SAS: PDF('GAMMA', x, α, β)

α 는 형태(shape) 모수, β 는 크기(scale) 모수이다. 다음 그래프는 모수에 따른 감마 확률밀도함수를 그린 것이다.





평균과 분산

$E(X)=\alpha\beta$, $V(X)=\alpha\beta^2$

PROOF 확률밀도함수의 전체 적분은 1이므로 $\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}=\beta^\alpha\Gamma(\alpha)$ 이다.

$$E(X)=\int_0^\infty x\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}dx$$
$$=\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^\alpha e^{-x/\beta}dx=\frac{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}=\alpha\beta$$

같은 방법으로 $E(X^2)=\frac{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+2)}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}=\alpha(\alpha+1)\beta^2$.

그러므로 $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\alpha\beta^2$.

감마함수의 성질 $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$

○ α 가 정수인 경우 $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$.

PROOF 부분 적분(Integral by parts)이나 표 적분을 이용하자.

부분 적분: $d(uv)=(du)v+u(dv)\Rightarrow\int d(uv)=\int v(du)+\int u(dv)$
$\Rightarrow\int u(dv)=uv-\int v(du)$

$u=x^{\alpha-1}$, $dv=e^{-x}dx$ 라 놓자. ➔ $du=(\alpha-1)x^{\alpha-2}dx$, $\int dv=\int e^{-x}dx\Rightarrow v=-e^{-x}$

$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx=-x^{\alpha-1}(e^{-x})|_0^\infty-\int -e^{-x}(\alpha-1)x^{\alpha-2}dx$ 이다.

그러므로 $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\int e^{-x}x^{\alpha-2}=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$. *Q.E.D.*

○ α 가 정수인 경우 $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)!$.

PROOF 위의 결과와 $\Gamma(1)=1$ 을 이용한다.

○ $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$: